

SECTIONS PLANES DE SURFACES

I - Des ensembles de points

Activité 1

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne un point $I(0; 0; a)$ avec a un réel non nul.

Soit (C) le cercle de centre I , de rayon r situé dans le plan d'équation $z = a$.

1. Quelle relation peut-on écrire entre les coordonnées de tout point N de (C) ?
2. On se propose de trouver l'ensemble (E) formé par les droites (ON) , N étant un point quelconque de (C) .
 - a. Que peut-on dire des vecteurs \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{ON} , M étant un point quelconque de (ON) ?
 - b. Montrer que les coordonnées (x, y, z) de M vérifient l'équation :
$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{a^2} z^2.$$
 - c. Conclure.
3. On note α l'angle de deux droites (ON) et (ON') avec N et N' diamétralement opposés sur (C) et $\alpha \in]0; \pi[$.
 - a. Faire une figure.
 - b. Montrer que : $\frac{r}{a} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
 - c. Montrer que l'équation de (E) est : $x^2 + y^2 = \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times z^2$.

Remarque : Toute droite (ON) est une génératrice du cône.

Activité 2

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le cercle (C) de centre O , de rayon r situé dans le plan d'équation $z = 0$.

1. Quelle relation peut-on écrire entre les coordonnées de tout point N de (C) ?
2. On se propose de trouver l'ensemble (E) formé par les droites (Δ) parallèles à l'axe (Oz) , passant par tout point N de (C) .
 - a. Que peut-on dire des vecteurs \overrightarrow{MN} et \vec{k} , M étant un point quelconque de la parallèle (Δ) à (Oz) passant par un point N quelconque de (C) ?
 - b. Montrer que les coordonnées (x, y, z) de M vérifient l'équation : $x^2 + y^2 = r^2$.
 - c. Conclure.

Remarque : Toute droite (Δ) est une génératrice du cylindre.

Synthèse 1 : Ensembles de points dans l'espace : cônes, cylindres, sphères, surfaces de révolution.

Définition 1 :

Soit A un point et r un réel strictement positif.

La **sphère** de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que la distance AM est égale à r .

Définition 2 :

Soit (D) une droite et r un réel strictement positif.

Le **cylindre** d'axe (D) et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que la distance de M à (D) est égale à r .

Définition 3 :

Soit (D) une droite, A un point de (D) , et α un réel de l'intervalle $]0 ; \pi[$.

Le **cône** de sommet A , d'axe (D) et d'angle au sommet α est l'ensemble des points M

de l'espace tels que : ou bien $M = A$, ou bien $\widehat{MAH} = \frac{\alpha}{2}$, H étant le projeté orthogonal de M sur (D) .

Définition 4 :

Soit (D) une droite, (P) un plan contenant (D) et \odot une courbe contenue dans (P) .

La surface engendrée par la courbe (C) lorsque le plan (P) tourne autour de (D) est une **surface de révolution d'axe (D)** .

Synthèse 2 (Equations des surfaces usuelles)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Equation d'une sphère :

Soit (S) la sphère de centre $A(x_A, y_A, z_A)$ et de rayon r ($r > 0$).

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2.$$

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$ est l'équation de (S) .

Equation d'un cône d'axe (Oz) :

Soit (C) le cône d'axe (Oz) , de sommet $A(0, 0, h)$ et d'angle au sommet α avec un réel de l'intervalle $]0 ; \pi[$.

$$M(x, y, z) \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (z - h)^2 \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

$x^2 + y^2 - (z - h)^2 \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$ est l'équation du cône (C) .

Equation d'un cylindre d'axe (Oz) :

Soit (C) le cylindre d'axe (Oz) , de rayon $r > 0$.

$$M(x, y, z) \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2.$$

$x^2 + y^2 = r^2$ est l'équation du cylindre (C) .

II - Fonctions de deux variables

Définition : Soit x un réel d'un intervalle I et y , un réel d'un intervalle J .
Tout procédé qui permet d'associer à tout couple (x, y) avec x dans I et y dans J , un unique réel z définit une **fonction de deux variables**.

La représentation graphique d'une fonction f de deux variables dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $z = f(x, y)$, avec x dans I et y dans J .
 $z = f(x, y)$ est une **équation de (S)** .

III - Sections planes

Activité 3

Soit la sphère (C) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 4z = 1$ et (P) le plan d'équation $z = \lambda$. Etudier suivant les valeurs de λ l'intersection de (C) et (P) .

Activité 4

L'espace est rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le cône (C) d'équation $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2$ et le plan (P_a) d'équation $x = a$.

- Démontrer que le plan (P_0) coupe le cône suivant deux droites passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{u}(0 ; 1 ; \sqrt{3})$ et $\vec{v}(0 ; 1 ; -\sqrt{3})$.
- Lorsqu'ils existent, on appelle (K_a) l'ensemble des points d'intersection du plan (P_a) et du cône (C) .

a. Vérifier que $M(x ; y ; z)$ appartient à (K_a) ssi on a $\frac{1}{3}z^2 - y^2 = a^2$ et $x = a$.

b. Soit $I_a(a ; 0 ; 0)$. Vérifier que $(I_a ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de (P_a) .

c. Soit M un point de (P_a) qui a pour coordonnées $(Y ; Z)$ dans le repère $(I_a ; \vec{u}, \vec{v})$ et $(a ; y ; z)$ dans $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Démontrer que : $y = Y + Z$ et $z = \sqrt{3}(Y - Z)$.

d. Déterminer une équation de la courbe (K_a) dans le repère $(I_a ; \vec{u}, \vec{v})$. En déduire que (K_a) est une hyperbole qui admet les droites passant par I_a et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} comme asymptotes.

L'intersection d'un cône de révolution d'axe (Oz) par un plan parallèle au plan (yOz) est une hyperbole.

Synthèse 3 (section d'un cylindre, d'un cône,...)

Lire pages 468 et 469 du livre Declic

IV- Etude détaillée de plusieurs sections planes

A- Sections planes de la surface d'équation $z = x^2 + y^2$

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $z = x^2 + y^2$.

On pose $z = f(x, y)$, où f désigne une fonction à deux variables.

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $z = x^2 + y^2$ constitue une surface S d'équation $z = x^2 + y^2$.

1. En utilisant l'équation de S , expliquer pourquoi :
 - a. S est situé au-dessus du plan (xOy) .
 - b. Le point O est sur la surface S .
2. Considérations géométriques
 - a. Comparer $f(x, y)$ et $f(-x, y)$ et en déduire une propriété géométrique de la surface S .
 - b. Comparer $f(x, y)$ et $f(x, -y)$ et en déduire une propriété géométrique de la surface S .
3. Section de S avec un plan d'équation $z = a$.
 - a. Expliquer pourquoi l'intersection du plan d'équation $z = 4$ et de la surface S est un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
Ce cercle, tracé sur la surface S , est appelé « courbe de niveau 4 » de la fonction f .
 - b. Quelle est l'intersection de la surface S avec le plan Q d'équation $z = 2$?
 - c. Plus généralement, préciser suivant les valeurs du réel a , l'intersection de la surface S et du plan d'équation $z = a$.
4. Section de S avec un plan d'équation $x = a$.
 - a. Quelle est l'intersection de la surface S avec le plan d'équation $x = 0$?
 - b. Quelle est l'intersection de la surface S avec le plan d'équation $x = 2$?
5. Section de S avec un plan d'équation $y = a$.
 - a. Quelle est l'intersection de la surface S avec le plan d'équation $y = 0$?
 - b. Quelle est l'intersection de la surface S avec le plan d'équation $y = 2$?
6. Soit $M(x, y, z)$ un point de S (z fixé)
 - a. Traduire en terme de distance le nombre $x^2 + y^2$.
 - b. En déduire que l'axe (Oz) est un axe de révolution pour S .

B- Sections planes de la surface d'équation $z = x y$

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $z = x y$.

On pose $z = f(x, y)$, où f désigne une fonction à deux variables.

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $z = x y$ constitue une surface S d'équation $z = x y$.

1. En utilisant l'équation de S , expliquer pourquoi le point O est sur la surface S .
2. Comparer $f(x, y)$ et $f(-x, -y)$ et en déduire une propriété géométrique de la surface S .
3. Section de S avec un plan d'équation $z = a$
 - a. Quelle est l'intersection de la surface S avec le plan Q d'équation $z = 0$?
 - b. Plus généralement, quelle est l'intersection de la surface S et du plan d'équation $z = a$ (a différent de 0) ?
4. Section de S avec un plan d'équation $x = a$
 - a. Quelle est l'intersection de la surface S avec le plan d'équation $x = 0$?
 - b. Quelle est l'intersection de la surface S avec le plan d'équation $x = a$?
5. Section de S avec un plan d'équation $y = a$
 - a. Quelle est l'intersection de la surface S avec le plan d'équation $y = 0$?
 - b. Quelle est l'intersection de la surface S avec le plan d'équation $y = a$?
6. Prouver que l'intersection de la surface S avec le plan d'équation $x - y = 0$ est une parabole.

Exercices p. 477 # 10 - 11 - 12 - 14 - 15 - 16 - 18 - 20 - 21 - 22 - 24 - 26 - 28 - 29 - 30 - 31 - 33 - 34 - 38 - 39.